Ref : voyage en Algèbre, Philippe Caldero.

Développement : Simplicité de SO_3 :

leçon 204
103
104
106
191

Théorème :

Le groupe SO_3 est simple

Lemme :

Si $g \in SO_3$, alors g est semblable à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Preuve lemme :

Si λ vp réelle de g, alors $\lambda = \pm 1$. De plus si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi vp. Donc le spectre de g est $\{1,1,1\}$, $\{1, \lambda, \bar{\lambda}\}$, $\{1,-1,-1\}$ et c'est tout car $g \in SO_3$ donc de déterminant positif.

En effet : λ vp d'une isométrie $\Rightarrow |\lambda| = 1$.
$u(x) = \lambda(x)$ et u conserve la norme donc
$\|x\| = \|u(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.

Soit $v \in \mathbb{R}^3$ $\vec{vp}$ lié à 1 (1 est tjrs vp), v de norme 1.
Soit $F = (\mathbb{R} v)^{\perp}$; F est stable par g (car g isométrie) (cf vecteurs des sev $O(q)$)

Donc $g_{|F} \in SO_2$ ce qui prouve le lemme.

En effet, dans SO_2, les éléments sont les rotations planes $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$. Preuve Soit $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. X orthogonal si ses deux colonnes sont des vecteurs unitaires orthogonaux ie. $\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$

De plus on veut que $\det = 1$ donc $SO_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}, a^2 + c^2 = 1 \right\}$ ■

Preuve théorème.

Soit $H \neq \{Id\}$ un sous groupe distingué de SO_3. Nous allons mq H contient un retournement. Alors H contiendra tout les retournements, or SO_3 est engendré par les retournements ! Donc $H = SO_3$.

(En effet : soit h retournement de H d'axe D
soit h' retournement de SO_3 d'axe D'
Alors $\exists\, g \in SO_3$ envoyant D sur D'. Or ghg^{-1} est un retournement d'axe $gD = D'$

On $g h g^{-1} \in H$ car H distingué donc $SO_3 \in H$. et donc $H = SO_3$.)

$\varphi : SO_3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $\varphi : g \longmapsto tr(g . h_0 . g^{-1} . h_0^{-1})$ où $h_0 \in H \setminus \{Id\}$.

$g h_0 g^{-1} h_0^{-1} \in SO_3$, alors par le lemme $tr(g h_0 g^{-1} h_0^{-1}) \leqslant 3$

(car $g h_0 g^{-1} h_0^{-1}$ semblable à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et trace invariante par chang de base) Dans la base $\{v, u_1, u_2\}$, $g h_0 g^{-1} h_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ avec $\{u_1, u_2\}$ bon de F.

De plus, SO_3 est connexe (car connexe par arc) et compact donc $\varphi(SO_3)$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, 3]$ avec $a \leqslant 3$.

(φ continue : composée de la trace continue et du produit matriciel (continu))

il atteint bien 3 car $Id \in SO_3$ et 3 est le max

Montrons désormais que $a \neq 3$. Par l'absurde, si $a = 3$, cela signifie que $\forall g \in SO_3$, $tr(g h_0 g^{-1} h_0^{-1}) = 3$ donc $g h_0 g^{-1} h_0^{-1} = Id$ autrement dit h_0 commute avec g, $\forall g \in SO_3$: $h_0 \in Z(SO_3)$. Or $Z(SO_3) = \{Id\}$. Contradiction, $a \neq 3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $a < 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) < 3$. ($n$ existe en passant $n \to +\infty$) car ce n'est pas une suite constante

Soit g_n tq $tr(g_n . h_0 . g_n^{-1} . h_0^{-1}) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$!

Soit $h_n = g_n . h_0 . g_n^{-1} . h_0^{-1}$ une rotation d'angle $\frac{\pi}{n}$.

Or H distingué dans SO_3, donc $h_n \in H$.

De plus $h_n^n \in H$ car H stable par produit. Et h_n^n est une rotation d'angle $n . \frac{\pi}{n} = \pi$, h_n est donc un retournement de H.

Question jury :

① Pourquoi le spectre de g est forcément dans ces 3 cas là ?

↳ le pol caractéristique est de degré 3, donc au moins une vp réelle par le TVI. sur $\mathbb{R}$

De plus les vp d'un élément de O_3 dans $\mathbb{C}$ sont de module 1. Enfin on discute sachant qu'on veut un $\det = 1$.

② Pourquoi F l'orthogonal de $\mathbb{R}.v$ est stable par g ?

Soit $\{v, v'\}$ base de F.

Soit $u \in F$. Mq $\langle g(u), v \rangle = 0$. $\forall v \in \{v, v'\}$

$$\langle g(u), v \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ g(v)=v}}{=} \langle g(u), g(v) \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ isométrie}}}{=} \langle u, v \rangle = 0$$

③ Ce $g|_F$ est dans SO_2. Qu'est ce que ça veut dire ?

Abus de langage : cela veut dire qu'on peut trouver une base tq $g|_F$ (endo de F) s'écrit $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

→ SO_2 pour la forme quadratique euclidienne de l'espace ambiant réduite sur F.

④ Fin du lemme : Unicité du $\theta \in [0, 2\pi[$?

→ trace invariante par similitude (ie. deux matrices semblables ont même trace)

donc forcément $\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta' & -\sin\theta' \\ & \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}$

ie. $2\cos\theta = 2\cos\theta'$.

⑤ Pourquoi $\exists g \in SO_3$ envoyant D sur D' ?

D, D' deux droites engendrées par deux vecteurs directeurs normés.

ces deux vecteurs définissent un plan. On prend g une rotation d'axe ~~une droite engendrée par un vecteur orthogonal à ce plan~~. plutôt "d'axe orthogonal au plan"

⑥ Pourquoi ghg^{-1} retournement d'une D' ?

↳ h retournement

matrice d'un retournement : symétrie orth. par. à une droite donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (c'est une rotation d'angle π).

soit E_1 sous espace propre lié à 1 (sep de h). Quand on conjugue ghg^{-1}, le sous espace propre est transporté sur gE_1 : principe de conjugaison / translation

⑦ Pq les retournements engendrent SO_3 ?

↳ dans une certaine base, les réflexions s'écrivent $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$

On mq que O_3 engendré par les réflexions par récurrence.

puis on utilise un lemme : le produit de deux réflexions est le produit de deux retournements.

⑧ Pq le centre de SO_3 est l'identité ?

Tout élément du centre stabilise les droites :

En effet il commute donc envoie les sous espaces propres sur des espaces propres, et donc fixe les droites : c'est encore le principe de translation / conjugaison.

Ainsi l'élément est une homotétie. Or, par le caractérisant du lemme, seule l'identité est possible.

⑨ À quoi sert la simplicité ?

Vu que le noyau d'un morphisme est distingué, alors tout morphisme de SO_3 dans un autre groupe est nul ou injectif.

(10) SO_3, l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$, est distingué dans O_3.

Preuve ?

↳ $\forall A \in SO_3(\mathbb{R}), \forall B \in O_3(\mathbb{R})$, $\det(B^{-1}AB) = \det(A) = 1$.

Lemme :

$SO_3(\mathbb{R})$ (en fait même $SO_n(\mathbb{R})$, même preuve) est compact et connexe.

Preuve :

▶ Compact

$SO_3(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{Id_3\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé dans $M_3(\mathbb{R})$, où
$\psi : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM.M$ est continue.

$O_3(\mathbb{R})$ borné car ses éléments sont des isométries donc $SO_3(\mathbb{R})$ est borné. $M_3(\mathbb{R})$ de dim finie, donc $SO_3(\mathbb{R})$ compact.

▶ Connexe

On va mq $SO_3(\mathbb{R})$ connexe par arc (i.e. on peut relier continûment ses éléments à I_3) et donc connexe.

Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$: $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$ tq $M = P.U_\theta.P^{-1}$ où $U_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$

(par le lemme). Soit alors $\gamma : [0,1] \to SO_3(\mathbb{R})$, $t \mapsto P.U_{t\theta}.P^{-1}$. γ est un chemin continu reliant M à I_3 et restant dans $SO_3(\mathbb{R})$. Donc $SO_3(\mathbb{R})$ connexe par arc, donc $SO_3(\mathbb{R})$ connexe.

∎

(11) Culture G :

SO_n simple ssi n impair

si n pair, SO_n contient le sous groupe distingué $\{I_n, -I_n\}$